CONVEXITÉ, MONOTONIE, INTERVALLES DE $\mathbb{R}$.

Dominique Hoareau, domeh@wanadoo.fr

Objectifs :

Dévisser le concept de borne supérieure dans $\mathbb{R}$, illustrer en force la procédure "saturation convexe" ou "recurrence topologique" dans $\mathbb{R}$.

Première partie

Quelques théorèmes de base sur $\mathbb{R}$

1- Intervalles fermés bornés de $\mathbb{R}$

Voici deux qualités topologiques remarquables du segment $[0,1]$:

$a)$ $[0,1]$ est une partie connexe de $\mathbb{R}$.

$b)$ $[0,1]$ est une partie compacte de $\mathbb{R}$.

Voici deux propriétés (d´usage fréquent) d´une fonction réelle f définie et continue sur $[0,1]$:

$\alpha)$ Théorème des valeurs intermédiaires :

$$f(0)f(1) < 0 \Rightarrow \exists \omega \in]0,1[\quad f(\omega) = 0.$$

$\beta)$ Théorème de Heine : f est bornée sur $[0,1]$. Mieux : f admet un maximum sur $[0,1]$.

Les preuves proposées sont autonomes, s´appuient sur le fait fondamental que toute partie non vide majorée de $\mathbb{R}$ possède une borne supérieure, et illustrent la procédure "saturation convexe".

Pour $a)$ (cf [1])
On munit $\{0,1\}$ de la topologie discrète et on envisage une fonction continue $f : [0,1] \to \{0,1\}$. On suppose que $f(0) = 0$ (raisonnement analogue si $f(0) = 1$). Soit $A = \{\alpha \in [0,1] \setminus \forall x \in [0,\alpha] f(x) = 0\}$. A est une partie de $\mathbb{R}$ non vide ($0 \in A$) et majorée (par 1) donc on peut considérer à bon droit sa borne supérieure notée a. La continuité de f assure que $a \in A$ et avec A clairement convexe, on a $A = [0,a]$. Reste à voir que $a = 1$. Si $a < 1$, par continuité de f en a, on choisit $\eta > 0$ tel que $f([a,a+\eta])$ soit contenu dans le voisinage ouvert $\{0\}$ de $f(a) = 0$. Il vient $a+\eta \in A$ avec $a < a+\eta \leqslant 1$. Contradiction avec le statut de a.

Pour $b)$
Soit $(\mathcal{O}_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de $[0,1]$ par des ouverts de $\mathbb{R}$, soit S l´ensemble des points x de $[0,1]$ tels qu´il existe un sous-ensemble fini J de I avec $[0,x] \subset \bigcup_{i\in J}\mathcal{O}_i$. S est non vide ($0 \in S$) et majorée (par 1). On pose alors à bon droit : $s = \sup S$. 0 est contenu dans l´un des ouverts $\mathcal{O}_i$, donc on peut trouver $\varepsilon > 0$ tel que $0+\varepsilon \in \mathcal{O}_i$, donc $0+\varepsilon \in S$, ce qui donne $s > 0$.

$s \in S$. En effet, on choisit un ouvert $\mathcal{O}_k$ contenant s, un réel $\alpha > 0$ tel que $]s-\alpha, s+\alpha[\subset \mathcal{O}_k$, et un point x de $S\cap]s-\alpha, s]$. $[0,x]$ est alors recouvert par une sous-famille finie $(\mathcal{O}_i)_{i\in J}$ du recouvrement, donc $[0,s] \subset \bigcup_{i\in J\cup\{k\}}\mathcal{O}_i$.

$s = 1$. Si $s < 1$, en imposant $s+\alpha \leqslant 1$, on a : $[0, s+\frac{\alpha}{2}] \subset \bigcup_{i\in J\cup\{k\}}\mathcal{O}_i$, ce qui implique $s+\frac{\alpha}{2} \in S$ et contredit le statut de s.

Pour $\alpha)$
On suppose que $f(0) > 0$. On pose :

$$\Omega = \{x \in [0,1] \ , \ \forall y \in [0,x] \quad f(y) \geqslant 0\}.$$

Ω est non vide ($0 \in S$) et majorée (par 1). Soit donc ω sa borne supérieure. Par continuité de f en 0, on peut choisir $\eta > 0$ tel que $\forall y \in [0,\eta]$ $f(y) > 0$, donc $\eta \in \Omega$, ce qui justifie que $\omega > 0$. Pour tout $x \in \Omega$, $f(x) \geqslant 0$ et toujours par continuité de f, $f(w) \geqslant 0$, ce qui donne au passage $\omega < 1$.
Si $\omega \notin \Omega$, on choisit $y \in [0,\omega[$ tel que $f(y) < 0$. $]y,\omega]$ ne contient alors aucun élément de Ω. Contradiction avec le statut de ω. Ω, clairement convexe, s´écrit donc : $\Omega = [0,\omega]$ avec $0 < \omega < 1$.
Si $f(\omega) > 0$, On choisit $\alpha \in]0, 1-\omega[$ tel que $\forall y \in [\omega, \omega+\alpha]$ $f(y) > 0$. Avec $\omega \in \Omega$, on a alors $\omega+\alpha \in \Omega$, impossible d´après le statut de ω. En définitive, $f(\omega) = 0$ avec $0 < \omega < 1$.

Pour $\beta)$
On pose : $\Gamma = \{x \in [0,1] \ ; \ f([0,x]) \ \textit{bornée}\}$. Γ est une partie de $\mathbb{R}$ convexe non vide ($0 \in \Gamma$) et majorée par 1, donc on peut envisager $\gamma = \sup \Gamma$. L´application f est continue en 0 donc il existe $\varepsilon \in]0,1]$ tel que f est bornée sur $[0,\varepsilon]$. Ainsi : $\gamma \geqslant \varepsilon > 0$. Si $\gamma < 1$, par continuité de f en γ, on prend $0 < \gamma' < \gamma$ et $\gamma < \gamma'' < 1$ tels que f est bornée sur $[\gamma', \gamma'']$. L´application f est bornée sur $[0, \frac{\gamma'+\gamma}{2}]$ et sur $[\frac{\gamma'+\gamma}{2}, \gamma'']$ donc f est bornée sur $[0,\gamma'']$, donc $\gamma'' \leqslant \gamma$. Contradiction et résultat.

On montre à présent que f admet un maximum sur $[0,1]$.

Si pour tout $x \in]0,1]$ on a $f(x) \leqslant f(0)$, f admet un maximum sur $[0,1]$ en 0. On suppose à présent qu´il existe $x_0 \in]0,1]$ tel que $f(x_0) > f(0)$. On pose :

$$A = \{x \in [0,1[\ , \ \exists y \in]x,1] \ f(x) < f(y)\}.$$

A est une partie non vide ($0 \in A$) et majorée de $\mathbb{R}$. Soit $a = \sup A$.

Le cas $a = 1$ assure que $a \notin A$.
On envisage à présent $a < 1$. Si $a \in A$, on choisit $b \in]a,1]$ tel que $f(b) > f(a)$. Soit $\varepsilon > 0$ tel que $f(b) > f(a)+\varepsilon > f(a)$. Par continuité de f en a, on choisit $\eta > 0$ tel que $a+\eta < b$ et

$f([a,a+\eta]) \subset]f(a)-\varepsilon, f(a)+\varepsilon[$. On prend $\tilde{a} \in]a,a+\eta]$, $\tilde{a} \in A$ car $f(b) > f(\tilde{a})$, ce qui contredit le statut de a. En définitive, $a \notin A$, ce qui implique : $\forall x \in]a,1]\ f(x) \leqslant f(a)$. A étant clairement convexe, on a par ailleurs $A = [0,a[$.

On veut à présent : $\forall x \in [0,a[\ f(x) \leqslant f(a)$. On pose

$$X = \{x \in [0,a[\ ,\ f(x) > f(a)\}.$$

Si X est non vide, on peut considérer $\bar{x} = \sup X$. On a $f(\bar{x}) \leqslant f(a)$. Sinon, par continuité de f en $\bar{x}$, on choisit $\eta > 0$ tel que $\forall x \in]\bar{x}-\eta, \bar{x}+\eta[\ f(x) > f(a)$ et $\bar{x}$ n´est plus un majorant de X.
On a aussi $f(\bar{x}) \geqslant f(a)$. Toujours par l´absurde, avec f continue en $\bar{x}$, on prend $\eta > 0$ tel que $\forall x \in]\bar{x}-\eta, \bar{x}]\ f(x) < f(a)$, donc $]\bar{x}-\eta, \bar{x}]$ ne contient aucun élément de X, contradiction avec le statut de $\bar{x}$. Par doubles inégalités, $f(\bar{x}) = f(a)$.

On montre que $\bar{x} = a$. Si $\bar{x} < a$, alors $\bar{x} \in A = [0,a[$. On choisit $y \in]\bar{x},1]$ tel que $f(y) > f(\bar{x}) = f(a)$. Par nécessité, $y \in]\bar{x},a[$, donc $y \in X$, ce qui est impossible par statut de $\bar{x}$.

Soit $\chi \in X$. On pose :

$$\Xi = \{x \in]\chi,a[\ f(x) > f(\chi)\}.$$

Ξ est non vide car $\chi \in A = [0,a[$, et majorée, donc on peut envisager à bon droit $\bar{\chi} = \sup \Xi$. $\forall x \in \Xi\ f(x) > f(\chi) > f(a)$ donc $f(\bar{\chi}) \geqslant f(\chi) > f(a)$. Ceci prouve que $\bar{\chi} < a$ ou $\chi \in A = [0,a[$. On choisit $\bar{\bar{\chi}} \in]\bar{\chi},a[$ tel que $f(\bar{\bar{\chi}}) > f(\bar{\chi}) \geqslant f(\chi) > f(a)$ et on aboutit à une contradiction avec le statut de $\bar{\chi}$.

Bilan : X est vide, ie $\forall x \in [0,a[\quad f(x) \leqslant f(a)$, ce qui assure en définitive que $f(a)$ est le maximum de f sur $[0,1]$.

Exercice 1
Voici un théorème de Darboux qui montre que "la propriété des valeurs intermédiaires n´est pas l´apanage des fonctions continues". (cf [1])

Soit $F : [0,1] \to [0,1]$ dérivable sur $[0,1]$, de dérivée $F' = f$. Alors

$$f(0)f(1) < 0 \Rightarrow \exists a \in]0,1[\quad f(a) = 0.$$

Preuve : On suppose que $f(0) > 0$ (et $f(1) < 0$). F est dérivable en 0 donc on peut écrire un développement limité de F à l´ordre 1 en 0 :

$$F(x) = F(0) + xf(0) + \circ(x) = F(0) + x[f(0) + \circ(1)].$$

On choisit $\eta \in]0,1]$ tel que le crochet soit supérieur à $\frac{f(0)}{2}$ sur $]0,\eta]$. On a alors $F(x) > F(0)$ sur $]0,\eta]$. De même, on choisit $\alpha > 0$ tel que $F(x) > F(1)$ sur $[1-\alpha,1[$. A présent, avec le théorème de Heine, F continue sur $[0,1]$ admet un maximum, en un point a nécessairement distinct des extrémités 0 et 1. Ainsi a est intérieur à $[0,1]$, donc $f(a) = F'(a) = 0$. cqfd

Exercice 2
Voici une application de α) et β), revue dans la suite du texte :

Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On suppose que f est localement injective ie pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe $\delta > 0$ tel que f est injective sur $[x - \delta, x + \delta]$. Alors f est globalement injective.

Preuve : Par l´absurde, il existe $a < b$ dans $\mathbb{R}$ tels que $f(a) = f(b)$. f n´est pas constante sur $[a, b]$ donc prend, par exemple, des valeurs strictement supérieures à $f(a)$. Continue sur le segment $[a, b]$, f admet un maximum sur $[a, b]$ (Théorème de Heine), en $c \in]a, b[$. Pour $\delta > 0$, on pose

$$y_\delta = \frac{1}{2}[f(c) + \max\left(f(c - \delta), f(c + \delta)\right)].$$

Par valeurs intermédiaires, y_δ est atteinte par f sur $[c - \delta, c]$ et sur $[c, c + \delta]$, ce pour tout $\delta > 0$. Contradiction avec la locale injectivité de f en c.

Remarque : La continuité de f est essentielle. Considérer f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x$ si $x < 0$ et $f(x) = -x + 1$ si $x \geqslant 0$...

2- Inégalité des accroissements finis

Voici un autre résultat fondamental d´analyse où l´on procède par "saturation convexe" : le théorème de comparaison des dérivées. Une jolie application en est donnée en fin de texte.

Enoncé : Soit $a < b$ dans $\mathbb{R}$, $(E, \| \quad \|)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé,
$f : [a, b] \to E$ et $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ continues sur $[a, b]$, dérivables sur $]a, b[$.
Si pour tout $x \in]a, b[$, $\| f'(x) \| \leqslant g'(x)$, alors $\| f(b) - f(a) \| \leqslant g(b) - g(a)$.

Grandes lignes de la preuve : Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $x \in]a, b[$,

$$lim_{h \to 0^+} \| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \| - \frac{g(x+h) - g(x)}{h} < \varepsilon$$

donc :

$$\forall x \in]a, b[\quad \exists \delta > 0 \quad \forall h \in [0, \delta] \quad \| f(x+h) - f(x) \| \leqslant g(x+h) - g(x) + \varepsilon h. \quad \checkmark$$

Pour a' dans $]a, b[$, on envisage alors :

$$I_\varepsilon = \{t \in [a', b] \ ; \ \forall u \in [a', t] \quad \| f(u) - f(a') \| \leqslant g(u) - g(a') + \varepsilon(u - a')\}.$$

On montre que I_ε est un intervalle de la forme $[a', c]$, puis que $c = b$ et on conclut en faisant tendre ε vers 0 puis a' vers a dans l´inégalité
$\| f(b) - f(a') \| \leqslant g(b) - g(a') + \varepsilon(b - a')$.

On propose ici quelques résultats (posés parfois aux épreuves orales des Grandes Ecoles) dont les hypothèses sont proches de $\checkmark$ et dont les preuves consistent à passer du local au global. La procédure

"saturation convexe" sera encore maintes fois illustrée. Le cadre choisi est essentiellement celui de la convexité et de la monotonie des fonctions réelles de la variable réelle.

Deuxième partie

Convexité, monotonie, du local au global

Notations

Soit I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$, φ une fonction réelle définie sur I et a un réel de I. p_a désigne la fonction pente de φ en a définie sur $I \setminus \{a\}$ par $p_a(x) = \frac{\varphi(x)-\varphi(a)}{x-a}$. On note $co(I)$ le cône des fonctions convexes sur I (stabilité pour l´addition et la multiplication par un réel positif) et on rappelle que l´appartenance à $co(I)$ équivaut à la croissance des fonctions pentes.

1- Trois lemmes

A- Une fonction convexe est localement lipschitzienne

Lemme : Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$ d´intérieur I° non vide et si $\varphi : I \to \mathbb{R}$ est une fonction convexe sur I, alors φ est lipschitzienne sur chaque segment contenu dans I°. En particulier, φ est continue sur I°.

Preuve : C´est une jolie application des inégalités des trois pentes.
Soit $a < b$ dans I°.
On choisit deux réels α et β de I° tels que : $\alpha < a < b < \beta$.

Pour $x < y$ dans $]a, b[$,

- $p_\alpha(a) \leqslant p_\alpha(x) \leqslant p_a(x)$
- $p_a(x) \leqslant p_a(y) \leqslant p_x(y)$
- $p_x(y) \leqslant p_x(b) \leqslant p_y(b)$
- $p_y(b) \leqslant p_y(\beta) \leqslant p_b(\beta)$

d´où, en posant $M = \max\{\mid p_\alpha(a) \mid, \mid p_b(\beta) \mid\}$, on a :

$$\mid \frac{\varphi(y)-\varphi(x)}{y-x} \mid \leqslant M \; ; \; \mid \frac{\varphi(y)-\varphi(a)}{y-a} \mid \leqslant M \, , \mid \frac{\varphi(b)-\varphi(x)}{b-x} \mid \leqslant M.$$

Par ailleurs, avec $p_\alpha(a) \leqslant p_\alpha(b) \leqslant p_a(b) \leqslant p_a(\beta) \leqslant p_b(\beta)$, $\mid \frac{\varphi(b)-\varphi(a)}{b-a} \mid \leqslant M$ et finalement φ est M-lipschitzienne sur $[a, b]$.

B- Un critère classique de convexité

Lemme : Une fonction $\varphi : I \to \mathbb{R}$ continue sur l´intervalle I, qui vérifie $\varphi(\frac{x+y}{2}) \leqslant \frac{1}{2}[\varphi(x)+\varphi(y)]$ pour tout (x,y) de I^2, est convexe sur I.

Preuve : Par l´absurde, φ est non convexe sur I. On choisit $a < b$ dans I et ν dans $]0,1[$ tels que : $\varphi(\nu a + (1-\nu)b) > \nu\varphi(a) + (1-\nu)\varphi(b)$. On pose : $c = \nu a + (1-\nu)b$. Soit ψ l´application affine définie par $\psi(a) = \varphi(a)$ et $\psi(b) = \varphi(b)$, et $g = \varphi - \psi$. g vérifie $g(a) = g(b) = 0$ et $g(c) > 0$. On envisage les parties de $\mathbb{R}$, $Z_- = \{u \in [a,c]\,;\, g(u) = 0\}$ et $Z^+ = \{v \in [c,b]\,;\, g(v) = 0\}$, qui sont fermées par continuité de g. On pose : $r = \max Z_-$ et $s = \min Z^+$ et on a : $r < c < s$. Par hypothèse, $g(\frac{1}{2}(r+s)) \leqslant \frac{1}{2}(g(r)+g(s)) = 0$.
Par valeurs intermédiaires, il existe t entre c et $\frac{1}{2}(r+s)$ tel que $g(t) = 0$. Or : $r < t < c$ ou $c < t < s$, d´où une contradiction avec le statut de r ou s.

La continuité de φ est essentielle ; pour un contre-exemple, cf RMS2-1989 ou [4]. Pour une autre preuve (argument de densité), cf [1] et pour une généralisation simple du lemme, cf R409 RMS4-2002.

C- Raccordement convexe

Lemme : Soit : $a < c < b < d$ dans $\mathbb{R}$ et $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application.
Si φ est convexe sur $]a,b]$ et sur $[c,d[$, alors φ est convexe sur $]a,d[$.

Preuve : Avec la continuité de φ sur $]a,d[$ (lemme A) et le critère de "mid-convexité", on veut : $\varphi(\frac{u+v}{2}) \leqslant \frac{1}{2}(\varphi(u)+\varphi(v))$
dès que : $a < u < c$ et $b < v < d$

•Premier cas : $c \leqslant \frac{u+v}{2} \leqslant b$
Avec φ convexe sur $]a,b]$, on écrit : $\varphi(\frac{u+v}{2}) \leqslant \frac{2b-(u+v)}{2(b-u)}\varphi(u) + \frac{v-u}{2(b-u)}\varphi(b)$
puis on majore dans l´inégalité ci-dessus $\varphi(b)$ par $\frac{2(v-b)}{v-u}\varphi(\frac{u+v}{2}) + \frac{2b-(u+v)}{v-u}\varphi(v)$
(φ convexe sur $[c,d[$) et on conclut.

•Deuxième cas : $b < \frac{u+v}{2}$
La convexité de φ sur $[c,d[$ donne :

$$(1) \quad \varphi(\frac{u+v}{2}) \leqslant \frac{v-u}{2(v-b)}\varphi(b) + \frac{v+u-2b}{2(v-b)}\varphi(v)$$

et :

$$(2) \quad \varphi(b) \leqslant \frac{u+v-2b}{u+v-2c}\varphi(c) + \frac{2(b-c)}{u+v-2c}\varphi(\frac{u+v}{2}).$$

De plus avec φ convexe sur $]a,b]$:

$$(3) \quad \varphi(c) \leqslant \frac{b-c}{b-u}\varphi(u) + \frac{c-u}{b-u}\varphi(b).$$

On fait ensuite : $\frac{2(c-b)(v-b)}{(u+v-2c)(u+b)}$ (1) + (2) + $\frac{u+v-2b}{u+v-2c}$ (3) membre à membre de façon à éliminer $\varphi(c)$ et $\varphi(b)$. Il reste : $\varphi(\frac{u+v}{2}) \leqslant \frac{1}{2}(\varphi(u)+\varphi(v)$.

•Troisième cas : $\frac{u+v}{2} < c$
analogue au cas précédent.

2- Du local au global

Proposition 1 *Soit φ dans $\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que :*

$$(\forall x \in \mathbb{R})\ (\exists \delta > 0)\ (\forall h \in [0,\delta])\ \left(\varphi(x) \leqslant \frac{1}{2}\left[\varphi(x-h)+\varphi(x+h)\right]\right). \quad ✠$$

Alors φ est convexe sur $\mathbb{R}$.

Remarque : L´hypothèse de continuité est essentielle : la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = 1$ si $x \in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$, $\varphi(x) = -1$ si $x \in]-1,1[$, et $\varphi(-1) = \varphi(1) = 0$ vérifie ✠ et n´est pas convexe sur $\mathbb{R}$.

preuve : Soit : $a < b$ dans $\mathbb{R}$.
On veut : $\varphi(x) \leqslant \varphi(a) + \frac{\varphi(b)-\varphi(a)}{b-a}(x-a)$ dès que : $a \leqslant x \leqslant b$

On envisage l' application
$\psi : x \mapsto \varphi(x) - [\varphi(a) + \frac{\varphi(b)-\varphi(a)}{b-a}(x-a)]$ de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$, nulle en a et b, et continue sur $[a,b]$. Soit M le maximum de ψ sur $[a,b]$.

On raisonne par l´absurde en supposant : $M > 0$.
Soit $\Omega = \{c \in [a,b]\ tq\ \psi(c) = M\}$. Toute fonction affine de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ réalise l' égalité dans ✠ donc ψ vérifie aussi ✠. Ainsi, en chaque c de Ω nécessairement distinct de a et b , on choisit $\delta > 0$ tel que :

$$[c-\delta, c+\delta] \subset [a,b]\ et\ (\forall h \in [0,\delta])\ (\psi(c) \leqslant \frac{1}{2}[\psi(c-h)+\psi(c+h)]).$$

Ceci impose $\psi(c-h) = \psi(c+h) = M$ et ce pour tout h dans $[0,\delta]$, c.a.d $[c-\delta, c+\delta] \subset \Omega$. Ω est donc un ouvert de $[a,b]$.

Ω est par ailleurs non vide, et fermé dans le connexe $[a,b]$ (par continuité de ψ) donc $\Omega = [a,b]$ i.e $\psi = M > 0$ sur $[a,b]$. Contradiction car $\psi(a) = 0$.

Exercice (même schéma de preuve, cf [2])
Soit $\varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Montrer que :

$$\forall u < v \quad \forall f \in \mathcal{C}([u,v],\mathbb{R}) \quad \varphi(\frac{1}{v-u}\int_u^v f) \leqslant \frac{1}{v-u}\int_u^v \varphi \circ f \Rightarrow \varphi \in co(\mathbb{R}).$$

Avec $f = id_{\mathbb{R}}$, pour $x \in \mathbb{R}$ et $h \geqslant 0$, on peut écrire :

$$h\varphi(x) \leqslant \int_{x-\frac{h}{2}}^{x+\frac{h}{2}} \varphi(t)dt$$

puis on reprend (comme pour la proposition 1) $a < b$ dans $\mathbb{R}$, l´application ψ, son maximum M sur $[a, b]$ et on démontre par l´absurde que M est négatif. Voici pour le plaisir une autre justification de l´implication.

Soient $a < b$ dans $\mathbb{R}$ et $\lambda \in]0, 1[$. On veut : $\varphi((1-\lambda)a + \lambda b) \leqslant (1-\lambda)\varphi(a) + \lambda\varphi(b)$. Pour $\varepsilon \in]0, \min(\lambda, 1-\lambda)[$, on envisage l´application continue f_ε définie sur $[0, 1]$ par $f_\varepsilon(x) = b$ si $x \in [0, \lambda-\varepsilon]$, $f_\varepsilon(x) = a$ si $x \in [\lambda+\varepsilon, 1]$, f_ε affine sur $[\lambda-\varepsilon, \lambda+\varepsilon]$. La valeur moyenne de f_ε est : $\int_0^1 f_\varepsilon = (1-\lambda)a+\lambda b$. Soit M le maximum sur $[a, b]$ de l´application continue $\mid \varphi \mid$.
On a : $\int_0^1 \varphi \circ f_\varepsilon = \lambda\varphi(b) + (1-\lambda)\varphi(a) - \varepsilon(\varphi(b) + \varphi(a)) + \int_{\lambda-\varepsilon}^{\lambda+\varepsilon} \varphi \circ f_\varepsilon$
donc : $\int_0^1 \varphi \circ f_\varepsilon \leqslant \lambda\varphi(b) + (1-\lambda)\varphi(a) + 2\varepsilon[M - \frac{\varphi(a)+\varphi(b)}{2}]$.
Avec l´hypothèse :

$$\varphi((1-\lambda)a + \lambda b) \leqslant \lambda\varphi(b) + (1-\lambda)\varphi(a) + 2\varepsilon[M - \frac{\varphi(a) + \varphi(b)}{2}]$$

et ce pour tout ε dans $]0, \min(\lambda, 1-\lambda)[$. D´où le résultat.

L´implication réciproque est vraie et connue sous le nom "inégalité de Jensen". Elle peut se démontrer grâce aux sommes de Riemann...

Remarque : On retrouve le lemme B.

Proposition 2 *Soit f dans $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que :*

$$\boxed{(\forall x \in \mathbb{R})\ (\exists \delta > 0)\ (\forall h \in [0, \delta])\ \ (f(x-h) \leqslant f(x+h))\,.}$$

Alors f est croissante sur $\mathbb{R}$.

La continuité de f est essentielle ; considérer f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 0$ si $x < 0$, $f(x) = 1$ si $x > 0$ et $f(0) = -1$.

preuve (cf [2]) : Pour $a < b$ dans $\mathbb{R}$, on veut : $f(a) \leqslant f(b)$.

Soit : $\epsilon > 0$ et $A_\epsilon = \{x \in [a, b]\ tq\ \forall y \in [a, x]\ f(a) - \epsilon \leqslant f(y)\}$.

A_ϵ est non vide ($a \in A_\epsilon$).
Si $x \in A_\epsilon$ et $a \leqslant \dot{x} \leqslant x$, alors clairement : $\dot{x} \in A_\epsilon$ donc A_ϵ est un intervalle de $\mathbb{R}$.
A_ϵ est par ailleurs fermé dans le segment $[a, b]$ (par continuité de f), donc fermé dans $\mathbb{R}$. A_ϵ est donc de la forme $[a, c]$ avec $a \leqslant c \leqslant b$.

Reste à "décoller" de a puis à "gagner du terrain pour atteindre b". La continuité de f en a assure la

présence d' un $\overline{x} > a$ dans A_ϵ donc $c > a$.
Si $c < b$, on choisit $\delta > 0$ tel que

$$[c-\delta, c+\delta] \subset [a,b] \; et \; \forall h \in [0,\delta] \; f(c-h) \leqslant f(c+h)$$

$c \in A_\epsilon$ donc $\forall h \in [0,\delta] \; f(a) - \epsilon \leqslant f(c-h)$
d' où $\forall h \in [0,\delta] \; f(a) - \epsilon \leqslant f(c+h)$. On vient de prouver que : $c + \delta \in A_\epsilon$. Contradiction avec le statut de c.
Bilan : $f(a) - \epsilon \leqslant f(b)$ et ce pour tout $\epsilon > 0$. cqfd
Cette preuve est une illustration de "la récurrence topologique".

Remarque 1 On peut être tenté de poser :

$$A = \{x \in [a,b] \; tq \; \forall y \in [a,x] \; f(a) \leqslant f(y)\}$$

et de suivre la preuve ci-dessus. Ca coince ! Comment justifier que A n' est pas réduit au singleton $\{a\}$? On évite cet écueil grâce au ϵ de sécurité. (Idée également présente dans l´inégalité des accroissements finis vectoriels)

Remarque 2 Le schéma de la preuve ci-dessus peut servir à justifier le lemme B. On raisonne par l´absurde : on choisit $a < c < b$ dans I tels que : $\varphi(c) > \alpha c + \beta$ où $x \mapsto \alpha x + \beta$ est l´application affine qui envoie a sur $\varphi(a)$ et b sur $\varphi(b)$. On vérifie que $\Gamma_- = \{u \in [a,c] \, ; \, \forall y \in [u,c] \, \varphi(y) > \alpha y + \beta\}$ et $\Gamma^+ = \{v \in [c,b] \, ; \, \forall y \in [c,v] \, \varphi(y) > \alpha y + \beta\}$ sont des intervalles non vides de $\mathbb{R}$, de la forme $]r,c]$ et $[c,s[$. $\Gamma_- \cup \Gamma^+ =]r,s[$ est en fait la composante connexe de c dans l´ouvert Γ formé des réels x tels que $\varphi(x) > \alpha x + \beta$. Comme $\frac{1}{2}(r+s) \in \Gamma^+ \cup \Gamma_-$, $r \notin \Gamma$, $s \notin \Gamma$, on a :
$\varphi(\frac{1}{2}(r+s)) > \alpha \frac{r+s}{2} + \beta = \frac{1}{2}(\alpha r + \beta) + \frac{1}{2}(\alpha s + \beta) \geqslant \frac{1}{2}(\varphi(r) + \varphi(s))$, contradiction puisque par hypothèse, $\varphi(\frac{1}{2}(r+s)) \leqslant \frac{1}{2}(\varphi(r) + \varphi(s))$.

Comparer cette preuve à celle de la page 6.

Remarque 3 Si on change le sens de l´inégalité dans l´hypothèse encadrée de la proposition 2, on obtient f décroissante sur $\mathbb{R}$ (Appliquer la proposition 2 à $(-f)$). Ainsi une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \; (\exists \delta > 0) \; (\forall h \in [0,\delta]) \; (f(x-h) = f(x+h)) \, ,$$

est constante.

Exercice (*Oral Polytechnique*, J. Vauthier, Eska)
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue. On suppose que

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \; (\exists \delta > 0) \; (\forall h \in]0,\delta]) \; \left(\frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} = g(x) \right).$$

Alors f est une application affine.

Preuve : Pour $x \in \mathbb{R}$ et h "voisin" de 0, on écrit

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{2h} + \frac{f(x)-f(x-h)}{2h} = g(x)$$

et avec f dérivable sur $\mathbb{R}$, on obtient $f'(x) = g(x)$ en faisant tendre h vers 0. Au passage, on remarque que f' est continue sur $\mathbb{R}$.

Soit $s \in \mathbb{R}$ et $S = \{\delta \geqslant 0\,;\, \forall h \in [0,\delta]\ f(s+h) - f(s-h) = 2hf'(s)\}$.
S est une partie de $\mathbb{R}$ non vide ($0 \in S$) et clairement convexe donc S est de la forme $[0,\sigma)$ où $\sigma \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.

On suppose que S est majoré, $\sigma = \sup S$ est alors un nombre réel. Pour $0 \leqslant h < \sigma$, on écrit $f(s+h) - f(s-h) = 2hf'(s)$ et par dérivation licite par rapport à h, $f'(s+h) + f'(s-h) = 2f'(s)$. Par continuité de f', on a

$$f'(s+\sigma) + f'(s-\sigma) = 2f'(s).$$

A présent, l´hypothèse (considérée en $s+\sigma$ et $s-\sigma$) permet de choisir $\delta > 0$ tel que pour tout $h \in [0,\delta]$,

- $f(s+\sigma+h) - f(s+\sigma-h) = 2hf'(s+\sigma)$
- $f(s-\sigma+h) - f(s-\sigma-h) = 2hf'(s-\sigma)$.

Par addition membre à membre, $f(s+\sigma+h) - f(s-\sigma-h)$
$- [f(s+\sigma-h) - f(s-\sigma+h)] = 2h[f'(s+\sigma) + f'(s-\sigma)] = 2h[2f'(s)]$. Or, avec $\sigma - h \in S$, $f(s+\sigma-h) - f(s-\sigma+h) = 2(\sigma-h)f'(s)$. D´où $f(s+\sigma+h) - f(s-\sigma-h) = 2(\sigma+h)f'(s)$ et ce pour tout h dans $[0,\delta]$. Avec $\sigma \in S$ (continuité de f), on déduit que $\sigma+\delta \in S$, ce qui contredit le statut de σ. Bilan : $S = [0,+\infty[$ et ce pour tout $s \in \mathbb{R}$.

Ainsi, $\forall s \in \mathbb{R}\ \forall h \geqslant 0\ f(s+h) - f(s-h) = 2hf'(s)$. f' est alors dérivable sur $\mathbb{R}$, et en dérivant deux fois par rapport à h, $f'(s+h) + f'(s-h) = 2f'(s)$ puis $f''(s+h) - f''(s-h) = 0$, ceci pour tout $s \in \mathbb{R}$ et $h \geqslant 0$. Facilement, f'' est constante sur $\mathbb{R}$ et f est affine.

Application 1 *Soit g dans $\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.*
On suppose que pour tout réel x, le quotient $\frac{g(x+h)-g(x-h)}{2h}$ possède une limite réelle quand $h \to 0$ (notée $\tilde{g}(x)$). On dit que g est pseudo-dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\tilde{g}$ est appelée dérivée symétrique de g.
On suppose de plus : $\tilde{g} \geqslant 0$.
Alors g est croissante sur $\mathbb{R}$.

Pour $\alpha > 0$, soit $g_\alpha : x \to g(x) + \alpha x$.

g_α est pseudo-dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $\tilde{g_\alpha}(x) = \tilde{g}(x) + \alpha \geqslant \alpha$.
Il existe donc $\delta > 0$ tel que : $\forall h \in]0,\delta]\quad \frac{g_\alpha(x+h)-g_\alpha(x-h)}{2h} \geqslant 0$.
Ainsi $\forall h \in [0,\delta]\quad g_\alpha(x+h) - g_\alpha(x-h) \geqslant 0$ et donc g_α est croissante sur $\mathbb{R}$.

Si $a < b$ dans $\mathbb{R}$, $g(a) - \alpha(b-a) \leqslant g(b)$ et ce pour tout $\alpha > 0$
donc $g(a) \leqslant g(b)$ dès que $a < b$.

Voici un raffinement de la proposition 1.

Proposition 3 *Soit* φ *dans* $\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ *telle que :*

$$\boxed{(\forall x \in \mathbb{R})\ (\forall \epsilon > 0)\ (\exists h \in]0,\epsilon])\ (\varphi(x) \leqslant \frac{1}{2}[\varphi(x-h)+\varphi(x+h)])}.$$

Alors φ *est convexe sur* $\mathbb{R}$.

preuve : Soit : $a < b$ dans $\mathbb{R}$.

Comme pour la proposition 1 , ψ désigne l' application
$x \mapsto \varphi(x) - [\varphi(a) + \frac{\varphi(b)-\varphi(a)}{b-a}(x-a)]$ de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$, nulle en a et b,
et continue sur $[a,b]$; M désigne le maximum de ψ sur $[a,b]$
et on pose $\Omega = \{c \in [a,b]\ tq\ \psi(c) = M\}$.

Une inégalité du type $\varphi(c) \leqslant \frac{1}{2}[\varphi(c-h)+\varphi(c+h)]$ $(a < c < b\ ; c \in \Omega)$ n' est supposée valable que "ponctuellement" autour de c ; On ne peut plus procéder comme dans la proposition 1. L´idée est de privilégier un point du fermé Ω : son minimum c_0.

Si $a < c_0 < b$, on peut choisir h dans $\mathbb{R}_+^*$ tel que
$a \leqslant c_0 - h < c < c_0 + h \leqslant b$ et $\varphi(c_0) \leqslant \frac{1}{2}[\varphi(c_0-h)+\varphi(c_0+h)]$.
Ceci impose : $\psi(c_0-h) = \psi(c_0+h) = M$ donc $c_0 - h \in \Omega$.
Contradiction avec le statut de c_0.

Bilan : $c_0 = a$ ou $c_0 = b$ d' où $\psi \leqslant 0$ sur $[a,b]$. cqfd

Application 2 *Soit* $\rho \in \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
On suppose que pour tout réel x, *le quotient* $\Delta_2\rho(h,x) = \frac{\rho(x+h)+\rho(x-h)-2\rho(x)}{h^2}$ *possède une limite réelle quand* $h \to 0$ *(notée* $\rho^*(x)$*).* ρ^* *est appelée dérivée seconde de Schwarz de* ρ.
On suppose de plus : $\rho^* \geqslant 0$.
Alors ρ *est convexe sur* $\mathbb{R}$.

Pour $\alpha > 0$, soit $\rho_\alpha : x \to \rho(x) + \alpha x^2$.

ρ_α^* est définie sur $\mathbb{R}$ par $\rho_\alpha^*(x) = \rho^*(x) + 2\alpha$ donc $\rho_\alpha^* \geqslant 2\alpha$.
Ainsi, $(\forall x \in \mathbb{R})\ (\forall \varepsilon > 0)\ (\exists h \in]0,\varepsilon])$ $\frac{\rho_\alpha(x+h)+\rho_\alpha(x-h)-2\rho_\alpha(x)}{h^2} \geqslant \alpha \geqslant 0$
d´où : $(\forall x \in \mathbb{R})\ (\forall \varepsilon > 0)\ (\exists h \in]0,\varepsilon])$ $\rho_\alpha(x) \leqslant \frac{1}{2}(\rho_\alpha(x+h)+\rho_\alpha(x-h)$
ρ_α est donc convexe.

ρ, limite simple des applications convexes ρ_α quand $\alpha \to 0^+$, est aussi convexe.

Exercice : Sans utiliser l´application 2, montrer directement qu'une fonction $g \in \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ pseudo-dérivable deux fois vérifiant $g^* = 0$, est une application affine.

Preuve (cf [5]) : Soit $a < b$ dans $\mathbb{R}$, γ l´application affine définie par $\gamma(a) = g(a)$ et $\gamma(b) = g(b)$. On veut : $\gamma = g$ sur $[a,b]$. On envisage pour $\varepsilon > 0$ l´application $P : x \mapsto g(x) - \gamma(x) + \varepsilon(x-a)(x-b)$ (interpolation parabolique). $P \in \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est comme g pseudo-dérivable deux fois sur $[a,b]$ et $P^* \equiv 2\varepsilon$.

Soit $c \in [a,b]$ tel que $P(c)$ est le maximum de P sur $[a,b]$. Si $c \in]a,b[$, alors, pour tout $h > 0$ tel que $[c-h, c+h] \subset [a,b]$, on a : $\Delta_2 P(h,c) \leqslant 0$ donc $P^*(c) \leqslant 0$. Absurde !
Bilan : $c = a$ ou $c = b$. Il vient : $\forall x \in [a,b] \quad P(x) \leqslant P(a) = P(b) = 0$, ce qui donne en faisant tendre ε vers 0^+ $g(x) \leqslant \gamma(x)$. Le même raisonnement avec $\varepsilon < 0$ donne $\gamma \geqslant g$ sur $[a,b]$.
g, affine sur $[a,b]$, est C^2 sur $]a,b[$ avec $g'' = 0$, et ce pour tout $a < b$ dans $\mathbb{R}$, donc g est C^2 sur $\mathbb{R}$ avec $g'' = 0$. g est bien une application affine.

Question : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$\boxed{(\forall x \in \mathbb{R})\ (\forall \varepsilon > 0)\ (\exists h \in]0,\varepsilon])\ \left(f(x-h) < f(x+h)\right).}$$

A-t-on f croissante sur $\mathbb{R}$?

Proposition 4 *Si φ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est localement convexe sur $\mathbb{R}$,
i.e si pour tout réel x, il existe $\delta > 0$ tel que φ est convexe sur $]x-\delta, x+\delta[$,
alors φ est convexe sur $\mathbb{R}$.*

Preuve : Il suffit de montrer que pour tout réel a, φ est convexe sur $]a, +\infty[$.
Soit $a \in \mathbb{R}$ et $A = \{b > a \setminus \varphi \textit{ convexe sur }]a,b[\}$.
A contient un $a + \delta$ avec $\delta > 0$.
De plus, si $b \in A$ et $a < c \leqslant b$, clairement : $c \in A$ donc A est un intervalle non vide de $\mathbb{R}$, de la forme $]a, c)$ avec $c \in]a, +\infty[\cup \{+\infty\}$
On veut : $c = +\infty$. Si $c \in \mathbb{R}$, soit $\gamma > 0$ tel que : $a < c - \gamma$ et φ convexe sur $]c-\gamma, c+\gamma[$. La convexité de φ sur $]a, c - \frac{\gamma}{2}]$ et $[c - \frac{3}{4}\gamma, c+\gamma[$ et le lemme C de raccordement convexe assurent que φ est convexe sur $]a, c+\gamma[$. D`où : $c + \gamma \in A$. Contradiction avec le statut de c et résultat.

Remarque : Le même schéma de preuve assure qu´une fonction réelle localement lipschitzienne sur $\mathbb{R}$ est globalement lipschitzienne sur tout segment de $\mathbb{R}$. De même, une fonction réelle localement polynômiale sur $\mathbb{R}$ est polynômiale. En particulier, une application localement constante coincide sur $\mathbb{R}$ avec un polynôme, nécessairement constant.

En adaptant la preuve ci-dessus, on a aussi :

Proposition 5 *Toute fonction réelle f localement croissante sur $\mathbb{R}$ est croissante sur $\mathbb{R}$.*

Remarques :
• Le résultat est encore vrai si on remplace "croissante" par "décroissante" et on retrouve le fait qu´une fonction réelle localement constante sur $\mathbb{R}$ est constante sur $\mathbb{R}$.
• Le résultat est-il encore vrai si on remplace "croissante" par "monotone" ? La réponse est non. Penser à la fonction "trapèze" f définie par $f(x) = x+1$ si $x \in]-\infty, -1[$, $f(x) = 0$ si $x \in [-1,1]$, $f(x) = -x+1$ si $x \in]1, +\infty[$. En revanche, toujours avec le même schéma de preuve, on a :

Proposition 6 *Toute fonction réelle f localement strictement monotone sur $\mathbb{R}$ est strictement monotone sur $\mathbb{R}$. (cf [2])*

On retrouve l´exercice 2 de la première partie :

Application 3 *Toute fonction f de $\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ localement injective est globalement injective sur $\mathbb{R}$.*

Une telle fonction f continue et localement injective est localement strictement monotone, donc strictement monotone sur $\mathbb{R}$ d´après la proposition 6, et finalement globalement injective comme souhaité.

Proposition 7 *Soit f dans $\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, "croissante à droite en tout réel x " :*

$$\boxed{(\forall x \in \mathbb{R})\ (\exists \delta > 0)\ (\forall y \in [x, x+\delta])\ (f(x) \leqslant f(y))\bigstar}$$

Alors f est croissante sur $\mathbb{R}$.

La continuité de f est essentielle. (même contre-exemple que pour la proposition 2)

preuve (cf [2]) : Par l´absurde, on a des réels u et v tels que : $u < v$ et $f(u) > f(v)$. On appelle m le minimum de f sur $[u, v]$ et on pose :

$$A = \{x \in [u, v] \setminus f(x) = m\}.$$

A est un compact non vide. Soit ω son minimum.
on a : $\omega > u$ (sinon $m = f(u) > f(v) \geqslant m$)
donc, pour x dans $[u, \omega[$, $f(x) > m$.
On pose : $M = \max_{[u,\omega]} f$; $B = \{x \in [u, \omega] \setminus f(x) = M\}$ et $b = \max B$.

- si $b = \omega$, on a : $M = f(b) = f(\omega) = m$. Impossible.
- si $b < \omega$, on choisit, selon l´hypothèse, δ dans $]0, \omega - b[$ tel que :

$$\forall y \in [b, b+\delta] \quad f(b) = M \leqslant f(y).$$

Ceci impose : $f \equiv M$ sur $[b, b+\delta]$ donc $b + \delta \in B$. Contradiction.

Remarque : On peut aussi démontrer la proposition 7 par "saturation convexe", sans évoquer l´existence d´un maximum ou d´un minimum ; Soit $a < b$ dans $\mathbb{R}$ et $A = \{x \in [a, b] \setminus \forall y \in [a, x]\ f(a) \leqslant f(y)\}$. On vérifie que A est un intervalle de $\mathbb{R}$ de la forme $[a, c]$ avec $a < c \leqslant b$ et on prouve que $c = b$ en raisonnant par l´absurde.

Application 4 *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable sur $\mathbb{R}$. On suppose que :*

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) \geqslant 0.$$

Alors f est croissante sur $\mathbb{R}$.

On suppose dans un premier temps $f' > 0$. La fonction dérivable f est continue sur $\mathbb{R}$ et la condition $f' > 0$ entraine clairement $\bigstar$. D´après la proposition 7, f est croissante sur $\mathbb{R}$. Pour le cas général, on termine de façon classique en considérant pour $\varepsilon > 0$, $x \mapsto f(x) + \varepsilon x$.

On peut vérifier que l´application 4 équivaut à *l'inégalité des accroissements finis réels.*

Exercice 1 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, vérifiant $ff'' = 0$. On pose : $Z = \{x \in \mathbb{R}\ ,\ f(x) = 0\}$. En étudiant Z, montrer que f est une application affine.

On distingue trois cas :

1. $Z = \oslash$. On a alors $f'' = 0$, donc f est affine. f est par ailleurs sans zéros donc f est constante non nulle sur $\mathbb{R}$.

2. Z est un singleton $\{z\}$. f ne s´annule pas sur $]-\infty, z[$ et sur $]z, +\infty[$ donc il existe $(m_-, m_+) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $f(x) = m_-(x-z)$ sur $]-\infty, z[$ et $f(x) = m_+(x-z)$ sur $]z, +\infty[$. la dérivabilité de f en z donne alors $f'(z) = m_- = m_+$, donc f est affine sur $\mathbb{R}$.

3. Z possède deux éléments $a < b$ distincts.
   • Si $Z = \mathbb{R}$, alors f est identiquement nulle.
   • Si $Z \neq \mathbb{R}$, on peut supposer que Z (fermé dans $\mathbb{R}$ par continuité de f) est majoré. Soit alors $c = \sup Z = \max Z$. ff' de dérivée positive ${f'}^2$, est croissante sur $[a, c]$ avec $ff'(a) = ff'(c) = 0$. ff' est donc nulle sur $[a, c]$. f^2 de dérivée $2ff'$, est donc constante sur $[a, c]$, nulle sur $[a, c]$. On a prouvé que $[a, c] \subset Z$. Le même raisonnement prouve que Z est un intervalle (fermé) de $\mathbb{R}$. A présent, f sans zéros sur $]c, +\infty[$ vérifie $f(x) = m(x-c)$ sur $]c, +\infty[$ où m est un réel non nul. Avec f dérivable en c, on a : $f'_d(c) = m = f'_g(c) = 0$. Contradiction et impossibilité de la situation "$Z \neq \mathbb{R}$ a deux éléments distincts".

Exercice 2 : On considère l´équation différentielle $(E) : u' = f(t, u)$ où f est l´application C^1 de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(t, u) = \cos u + \cos t$. Soit ψ une solution maximale de (E). On peut montrer que ψ est définie et C^∞ sur $\mathbb{R}$. On suppose qu´il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\psi(t_0) = 0$.
Montrer que $\forall t \in \mathbb{R} \quad t \geqslant t_0 \Rightarrow \psi(t) \geqslant 0$.

Preuve (cf [5]) : Soit $X = \{x \geqslant t_0\,;\, \forall t \in [t_0, x]\ \psi(t) \geqslant 0\}$. X est non vide ($t_0 \in X$) et clairement convexe. Si X est majoré, on pose à bon droit $x_0 = \sup X$. La continuité de ψ entraine $\psi(x_0) \geqslant 0$ et même $\psi(x_0) = 0$ (Sinon on peut trouver des éléments de X strictement supérieurs à x_0). Il vient $\psi'(x_0) = 1 + \cos x_0 \geqslant 0$.

1. Si $\psi'(x_0) > 0$, par continuité de ψ', ψ est strictement croissante au voisinage de x_0, et donc positive sur un certain $[x_0, x_0 + \alpha[\quad (\alpha > 0)$. Contradiction avec la définition de x_0.

2. Si $\psi'(x_0) = 0$, alors $x_0 \in \pi + 2\pi\mathbb{Z}$. On vérifie facilement que $\psi''(x_0) = 0$ et $\psi'''(x_0) = 1$. Avec ψ''' continue, ψ'' est croissante et donc positive sur un certain $[x_0, x_0 + \alpha[\quad (\alpha > 0)$. ψ' est alors croissante sur $[x_0, x_0 + \alpha[$ et y est donc positive. Enfin , à son tour, ψ croît et est positive sur $[x_0, x_0 + \alpha[$, ce qui contredit le statut de x_0.

Bilan : X n´est pas majoré. cqfd

Question : Soit φ dans $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que :

$$\boxed{(\forall x \in \mathbb{R})\ (\exists \delta > 0)\ (\forall y \in [x, x+\delta])\ \left(\varphi(\frac{x+y}{2}) \leqslant \frac{1}{2}[\varphi(x) + \varphi(y)]\right).}$$

A-t-on φ convexe sur $\mathbb{R}$?

Réponse : NON ! avec la "fonction-rampe" φ définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = 0$ si $x \leqslant 0$, $\varphi(x) = -x$ sinon , qui est de surcroît concave.
Un point suffit pour faire un raccordement monotone entre deux intervalles de même monotonie. Pour un raccordement convexe, il est nécessaire que les deux intervalles de convexité se chevauchent.

Voici un raffinement de la propriété précédente :
(cf Choquet, topologie, Masson)

Proposition 8 *Soit f dans $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que :*

$$\boxed{(\forall x \in \mathbb{R})\ (\forall \delta > 0)\ (\exists y \in [x, x+\delta])\ (f(x) \leqslant f(y))}$$

Alors f croissante sur $\mathbb{R}$.

Preuve : Soit $a < b$ dans $\mathbb{R}$. Pour $\varepsilon > 0$, on pose :

$$A_\varepsilon = \{x \in [a, b]\ ;\ f(a) - \varepsilon \leqslant f(x)\}.$$

La partie A_ε de $\mathbb{R}$ est non vide ($a \in A_\varepsilon$), bornée par b et fermée par continuité de f, donc A_ε contient $c = \sup A_\varepsilon = \max A_\varepsilon$. Si $c < b$, $f(c) = f(a) - \varepsilon$. Sinon, $f(c) > f(a) - \varepsilon$, et par continuité de f, c est intérieur à A_ε !
Par hypothèse, on peut choisir un réel $\tilde{c}$ dans $]c, b[$ tel que $f(c) \leqslant f(\tilde{c})$.
Ainsi, $\tilde{c} \in A_\varepsilon$, ce qui contredit le statut de c.
Bilan : $c = b$, $f(a) - \varepsilon \leqslant f(b)$ et ce pour tout $\varepsilon > 0$, donc $f(a) \leqslant f(b)$.

Application 5 *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue telle que : $f(a) = f(b)$.*
Alors il existe $c_1 \in]a, b[$ tel que f est croissante à droite en c_1, et il existe $c_2 \in]a, b[$ tel que f est décroissante à droite en c_2.

Preuve : On suppose que f est non constante sur $[a, b]$ et que f prend des valeurs strictement négatives sur $[a, b]$. (Sinon, adapter...)
Avec f continue sur $[a, b]$, on envisage $c_1 \in]a, b[$ tel que $f(c_1) = \min_{[a,b]} f < 0$. L´application f est clairement croissante à droite en c_1. Si f n´est nulle part décroissante à droite, on peut écrire :

$$\forall x \in]a, b[\quad \forall \delta > 0 \quad \exists y \in [x, x+\delta] \quad f(x) < f(y).$$

L´application continue f est alors croissante sur $]a, b[$. Pour tout $x \in]a, c_1]$, on a alors $f(x) \leqslant f(c_1) < 0$ et en faisant correctement tendre x vers a, il vient $f(a) \leqslant f(c_1) < 0$. Contradiction et résultat.

Proposition 9 *Soit f dans $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que :*

$$\boxed{(\forall x \in \mathbb{R})\ (\exists\, \delta_x = \delta > 0)\ (\forall y \in [x-\delta, x+\delta])\ (f(x) \leqslant f(y))\bigstar\bigstar}$$

Alors f est constante sur $\mathbb{R}$. Autrement dit, une fonction de $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ qui admet un minimum local en tout point est constante.

Remarque préliminaire : Dans l´inégalité des accroissements finis vectoriels rappelée dans la première partie, on peut remplacer $f\, et\, g\, dérivables$ par $f\, et\, g\, dérivables\, à\, droite$, f' par f'_d et g' par g'_d (cf [6]). Comme application immédiate, une fonction réelle f continue sur un intervalle I et admettant une dérivée à droite positive (respectivement négative) sur I est croissante (respectivement décroissante). L´hypothèse de continuité est essentielle, penser à une fonction en escalier convenable...

Preuve : ($\bigstar\bigstar \Rightarrow \bigstar$) donc f est croissante sur $\mathbb{R}$ selon la proposition 7, puis, toujours avec $\bigstar\bigstar$,

$$(\forall x \in \mathbb{R})\ (\exists \delta > 0)\ (\forall y \in [x-\delta, x])\ (f(x) = f(y)).$$

On peut conclure de deux façons :
• L´application $x \mapsto f(-x)$ est continue et dérivable à droite de dérivée nulle, donc est constante, ce qui assure que f est constante sur $\mathbb{R}$.
• Si f n´est pas constante sur $\mathbb{R}$, il existe $a < b$ tel que $f(a) < f(b)$. Pour tout $z \in]f(a), f(b)[$, on choisit par valeurs intermédiaires un réel x dans $]a, b[$ tel que $z = f(x)$, puis par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, on prend un rationnel r_z dans $[x-\delta_x, x]$ tel que $f(r_z) = z$. On définit ainsi une application $r : z \mapsto r_z$ de $]f(a), f(b)[$ dans $\mathbb{Q}$, clairement injective. L´intervalle $]f(a), f(b)[$ est donc dénombrable, ce qui est impossible.

3- Régularité d´une fonction de $co([0,1])$

On veut prouver qu´une fonction f convexe sur le segment $[0,1]$ est continue sur $]0,1[$ et réglée sur $[0,1]$. La continuité de f sur $]0,1[$ est acquise avec le lemme A. Reste à justifier l´existence dans $\mathbb{R}$ de $f(0+0)$ puis adapter pour l´existence dans $\mathbb{R}$ de $f(1-0)$.

a) f est bornée sur $[0,1]$.

- Pour $x \in [0,1]$, $f(x) = f(x.1 + (1-x).0) \leqslant xf(1) + (1-x)f(0)$ donc $f(x) \leqslant M$ où $M = \max(f(0), f(1))$. L´application f est donc majorée sur $[0,1]$.
- On pose : $c = \frac{1}{2}(a+b)$. Pour $\mid t \mid \leqslant c$, on a : $f(c) \leqslant \frac{1}{2}[f(c+t) + f(c-t)]$ donc $f(c+t) \geqslant 2f(c) - f(c-t) \geqslant 2f(c) - M$, donc f est minorée sur $[0,1]$.

Remarque (cf [2]) :

On peut retrouver le "caractère localement lipschitzien" d´une fonction convexe ; Si $0 < a < b < 1$, on choisit $h > 0$ tel que $[a-h, b+h] \subset [0,1]$. Selon ce qui précède, sans changer les notations, on choisit des réels m, M tels que $f([a-h, b+h]) \subset [m, M]$. Pour x, y dans $[a,b]$, on considère le réel de $[a-h, b+h]$:

$$z = y + h\, \frac{y-x}{\mid y-x \mid}.$$

On écrit alors : $y = \lambda z + (1-\lambda)x$ où $\lambda = \frac{|y-x|}{h+|y-x|} \in [0,1]$.
De là : $f(y) \leqslant \lambda f(z) + (1-\lambda)f(x)$ ie $f(y) - f(x) \leqslant \lambda\,(f(z) - f(x))$. Il vient $f(y) - f(x) \leqslant \lambda(M-m) \leqslant \frac{M-m}{h} \mid y-x \mid$. Par symétrie des rôles de x et y, on conclut que f est $\frac{M-m}{h}$-lipschitzienne sur $[a,b]$.

b) Avec le théorème de comparaison des dérivées. cf [2]

On veut justifier l´existence dans $\mathbb{R}$ de $f(0+0)$. L´application f est convexe sur $[0,1]$ donc f'_d est définie et croissante sur $]0,1[$.

* si f'_d est partout positive sur $]0,1[$, avec f continue sur $]0,1[$, le théorème de comparaison des dérivées donne la croissance de f sur $]0,1[$, et le théorème de la limite monotone assure le résultat puisque f est minorée sur $[0,1]$.

* s´il existe $a \in]0,1[$ tel que $f'_d(a) < 0$, la croissance de f'_d sur $]0,1[$ donne : $f'_d < 0$ sur $]0,a]$. f continue est alors décroissante sur $]0,a]$, et f majorée admet une limite finie en $0+$ par le théorème de la limite monotone.

c) Autre justification avec le théorème des valeurs intermédiaires.

- *Premier cas* : f est constante sur $]0,1[$. Rien à dire.
- *Deuxième cas* : $(\exists\, 0 < a < b < 1) \quad (f(a) \neq f(b))$.

**Premier sous-cas : $f(a) > f(b)$.
On montre que $f(x) \geqslant f(a)$ pour tout x de $[0,a]$. Par l´absurde,

$$(\exists\, 0 < \beta < a) \quad (f(\beta) < f(a)).$$

Pour v choisi dans $]\max(f(b), f(\beta)), f(a)[$, par valeurs intermédiaires (rappel : f est continue sur $]0,1[$), on prend u dans $]\beta, a[$ et u' dans $]a,b[$ tels que : $f(u) = f(u') = v$. a s´écrit : $a = \lambda u + (1-\lambda)u'$ avec $\lambda \in]0,1[$ et pourtant, $f(a) > \lambda f(u) + (1-\lambda) f(u') = v$. Contradiction.
On montre à présent que f est décroissante sur $]0,a]$. Par l´absurde,

$$(\exists\, 0 < r < s \leqslant a) \quad (f(a) \leqslant f(r) < f(s)).$$

On choisit v dans $]f(r), f(s)[$, puis par valeurs intermédiaires, $u \in]r,s[$, $u' \in]s,a[$ tels que : $f(u) = f(u') = v$. Contradiction comme ci-dessus avec $u < s < u'$ et $f(u) = f(u') = v < f(s)$.
On conclut avec f majorée sur $]0,a]$ et le théorème de la limite monotone.

**Deuxième sous-cas : $f(a) < f(b)$.
Si f est croissante sur $]0,a]$, le théorème de la limite monotone permet de conclure. Sinon, on choisit α et β rangés dans cet ordre dans $]0,a]$ tels que : $f(\alpha) > f(\beta)$. On est ainsi ramené au sous-cas précédent.

Références

[1] *La planète* $\mathbb{R}$, H. Boualem, R. Brouzet, Dunod, 2002.
[2] Polycopiés de J.M. Exbrayat,
Préparation Agrégation Interne 1993 : *Fonctions Monotones d'une variable réelle*,
Préparation Agrégation Externe 1997 : *Fonctions convexes*.
[3] *Les Maths en tête*, X. Gourdon, Ellipses, 1994.
[4] *Analyse à une variable réelle*, J.N. Mialet, A. Tissier, Bréal.
[5] Les cahiers de la RMS5, 1996,
RMS2-1989, RMS6-1998, RMS9-10-1998, RMS4-2002, ... Vuibert.
[6] *cours de mathématiques*, tome 2, J. Lelong-Ferrand, , J.M. Arnaudiès, Dunod,1972.

Remerciements à Dany-Jack Mercier pour la lecture attentive des premières versions du texte, et à Robert Brouzet pour ses nombreuses suggestions.